CONCOURS D'ENTRÉE

1986

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

OPTION PHYSIQUE-MATHEMATIQUES:sauf parties marquées"BIO"
OPTION BIOLOGIE-MATHEMATIQUES:sauf parties marquées "PHY"

DUREE: 3 HEURES

Le but du problème est de trouver des fonctions f des deux variables réelles x et t, admettant sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles de tous ordres, et qui vérifient sur ce domaine D :

$$(E)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

On dira alors que f est solution de (E) sur D.
Les 5 parties sont indépendantes.

PREMIERE PARTIE

1. Chercher les solutions de (E) de la forme $f(x,t) = p(x)q(t)$, où p et q sont deux fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2. Parmi les solutions trouvées au 1., en déterminer une qui vérifie :

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x,0) = \operatorname{ch} x$.

DEUXIEME PARTIE

PHY

1. Chercher les solutions de (E) qui sont harmoniques c'est-à-dire qui satisfont sur $\mathbb{R}^2$ à la relation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

2. Chercher parmi ces solutions celles qui s'annulent pour x = 0 et qui ont une limite finie, indépendante de x, lorsque t tend vers $+\infty$.

TROISIEME PARTIE

On considère la fonction complexe u des deux variables réelles x et t définie sur $\mathbb{R}^2$ par $u(x,t) = e^{\alpha x + \beta t}$ où α et β sont deux constantes complexes.

1. Déterminer la relation qui doit lier α et β pour que u vérifie (E).

2. On suppose $\beta = 2i$; calculer α. En déduire deux fonctions u_1 et u_2 qui vérifient (E).

3. Déduire de ce qui précède quatre fonctions réelles solutions de (E) sur $\mathbb{R}^2$.

4. a. Montrer que toute combinaison linéaire de ces quatre fonctions est aussi solution de (E) sur $\mathbb{R}^2$.

   b. Trouver une telle combinaison linéaire v qui vérifie de plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} v(0,t) = \cos 2t \\ \lim\limits_{x \to +\infty} v(x,t) = 0 \end{cases}$$

Tournez la page S. V. P.

QUATRIEME PARTIE

Soit g une fonction réelle de la variable réelle t, de classe C^∞ sur un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère la série de terme général :

$u_n = a_n x^{2n} g^{(n)}(t)$, où (a_n) est une suite réelle telle que $a_0 = 1$, et où $x \in \mathbb{R}$.

Lorsque cette série converge, on note $\varphi(x,t)$ sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

1. On suppose que g est un polynôme.

   a. Montrer que la série de terme général u_n converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$.

   b. Calculer les coefficients a_n de telle sorte que, quel que soit le polynôme g, $\varphi(x,t)$ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit α un réel fixé. On suppose que $g(t) = t^\alpha$, pour $t > 0$, et on suppose que, pour $n \in \mathbb{N}$, les coefficients a_n ont les valeurs trouvées au 1.b.

   a. Montrer que la série de terme général u_n converge pour tout x et pour tout $t > 0$.

On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $\alpha = -\frac{1}{2}$

   b. Expliciter $\varphi(x,t)$ et montrer que c'est une solution de (E) sur un domaine D que l'on précisera.

BIO

   c. Montrer qu'il existe un réel λ tel que, pour tout $t > 0$, la fonction $h : x \longmapsto \lambda\varphi(x,t)$ soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle X. Que valent E(X) et V(X) ?

   d. Montrer que la fonction de répartition de X est développable en série entière, donner son développement et préciser le rayon de convergence.

QUATRIEME PARTIE

On suppose que u(x,t) est une solution de (E) sur $\mathbb{R}^2$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x,0) = 0$.

1. On pose $V_n(x,t) = \int_0^t u(x,z)\frac{z^n}{n!}\,dz$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

BIO

On admet que, si $\psi(x,z)$ est une fonction continue et à dérivées partielles de tous ordres continues, on a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^t \psi(x,z)dz\right] = \int_0^t \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,z)dz.$$

   a. Montrer que V_0 est solution de (E) sur $\mathbb{R}^2$.

   b. Montrer que $\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2} = \frac{\partial V_n}{\partial t} - V_{n-1}$. sur $\mathbb{R}^2$. $(n \in \mathbb{N}^*)$.

2. En déduire que, pour tout polynôme Q(t), la fonction $F(x,t) = \int_0^t u(x,z)\, Q(t-z)\, dz$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}^2$.

(On pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange pour Q).